SOLUCIÓN PRUEBA N° 3 2016-1

1) Calcular $\displaystyle\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, para $\vec{F}=(-y,x,2z)$,
donde $S: x^2+y^2+z^2=25$ con vector $\hat{N}$ exterior a S.

a) **[10 ptos.]** Directamente.
Solución:

- $\overrightarrow{r}(\varphi,\alpha)=(5\cos\alpha\sin\varphi,5\sin\alpha\sin\varphi,5\cos\varphi)$ con $0\leq\alpha\leq 2\pi \quad 0\leq\varphi\leq\pi$
- $\overrightarrow{r}_\varphi=(5\cos\alpha\cos\varphi,5\sin\alpha\cos\varphi,-5\sin\varphi)$
- $\overrightarrow{r}_\alpha=(-5\sin\alpha\sin\varphi,5\cos\alpha\sin\varphi,0)$
- $\overrightarrow{r}_\varphi\times\overrightarrow{r}_\alpha=(25\sin^2\varphi\cos\alpha,25\sin^2\varphi\sin\alpha,25\sin\varphi\cos\varphi)$

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}=\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\hat{n}\,dS=\iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(\varphi,\alpha))\cdot(\overrightarrow{r}_\varphi\times\overrightarrow{r}_\alpha)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}250\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\,d\alpha=\frac{1000\pi}{3}$$

b) **[10 ptos.]** Usando el teorma de la divergencia de Gauss.
Solución:

$$\iint_S \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S}=\iiint_E div(\overrightarrow{F})\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{5}2\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\alpha=\frac{1000\pi}{3}$$

2) Sea $\vec{F}=(P(y)z,2Q(y)z,R(x)+y^2)$ con P,Q,R funciones reales.:

a) **[10 ptos.]** Hallar P,Q,R de modo que $\vec{F}$ sea campo CONSERVATIVO.
Solución: $\vec{F}$ es conservativo si el rotor es 0.

$\text{rot}(\vec{F})=\begin{vmatrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P(y)z & 2Q(y)z & R(x)+y^2\end{vmatrix}=0$. Por lo que se tiene las siguientes igualdades:

- $\dfrac{\partial(R(x)+y^2)}{\partial y}=\dfrac{\partial(2Q(y)z)}{\partial z}\Rightarrow 2y=2Q(y)\Rightarrow Q(y)=y$
- $\dfrac{\partial(R(x)+y^2)}{\partial x}=\dfrac{\partial(P(y))z}{\partial z}\Rightarrow\dfrac{\partial R(x)}{\partial x}=P(y)$
- $\dfrac{\partial(2Q(y)z)}{\partial x}=\dfrac{\partial(P(y)z)}{\partial y}\Rightarrow 0=\dfrac{\partial P(y)z}{\partial y}$

Luego se tiene que $P(y)=a=$cte, $R=ax+b$ con $b=$ cte
Por lo tanto $\vec{F}=(az,2yz,ax+b+y^2)$

b) **[7 ptos.]** Obtener la función potencial de $\vec{F}$
Solución:
Se tiene que:

- $\varphi=\displaystyle\int az\,dx=azx$
- $\varphi=\displaystyle\int 2yz\,dy=y^2z$

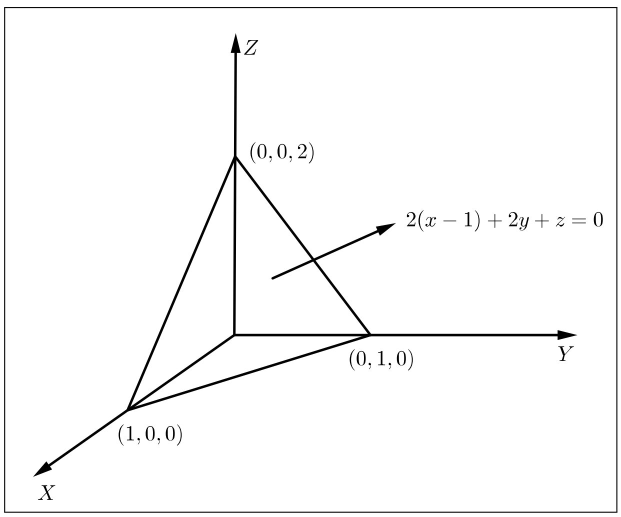
- $\varphi = \int (ax + b + y^2)\, dz = axz + bz + y^2 z$

Por lo tanto la función φ es :

$$\varphi(x, y, z) = axz + y^2 z + bz$$

c) **[3 ptos.]** Evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, si C es la intersección de : $z = 2 - x^2 - y^2$ con $z^2 = x^2 + y^2$
Solución:
Como la curva es cerrada entonces: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

3) **[20 ptos.]** Usar el Teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$
donde $\vec{F} = (2z, 8x - 3, 3x + y)$ y C es el triángulo de vértices en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$ como se muestra en la figura



Solución:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 8x - 3 & 3x + y \end{vmatrix} = (1, -1, 8)$$

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\,\overrightarrow{r} = \iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \widehat{n} dS = \iint_D (1, -1, 8) \underbrace{(2, 2, 1)}_{sale del plano} dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} 8\, dx\, dy = 4$$